Examen Resuelto (Tema 4)
13 de diciembre de 2017
B2A (Curso 2017/2018)

1. (2 puntos) Demuestra que el conjunto $\mathcal{B} = \{(-2,1,1),(1,2,0),(-2,1,-5)\}$ es una base ortogonal. Halla las coordenadas de $\overrightarrow{v} = (-2,6,8)$ en la base $\mathcal{B}$.

   sol. Basta con demostrar que el determinante de los vectores como columnas (o filas) es no nulo, pero $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 30 \neq 0.$

   Sabemos que $\mathcal{B}$ es una base. Para ver que es ortogonal, comprobamos que $(-2,1,1)\cdot(1,2,0) = 0$, $(-2,1,1)\cdot(-2,1,-5) = 0$ y $(1,2,0)\cdot(-2,1,-5) = 0$.

2. (2 puntos) Considera los puntos $A(-1,2,-1)$, $B(m,1,0)$ y $C(2,-m,3)$.

   a) Determina el valor de m para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean ortogonales.
   Sol. $\overrightarrow{AB} = (m+1,-1,1)$ y $\overrightarrow{AC} = (3,-m-2,4)$. $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC} = 0 \Longrightarrow 3(m+1)+m+2+4 = 0 \Longrightarrow \boxed{-\frac{9}{4}}$

   b) (2 puntos) Obtén el ángulo formado por los vectores anteriores para $m = 1$.
   Sol. $\overrightarrow{AB} = (2,-1,1)$ y $\overrightarrow{AC} = (3,-3,4)$.

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{13}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{34}} = \boxed{24,47^{o}}$$

3. Los vectores $\overrightarrow{u} = (0,m,m)$, $\overrightarrow{v} = (m-3,m+4,0)$ y $\overrightarrow{w} = (m,4,-m)$ generan un paralelepípedo de volumen 9 u^3. Determina los posibles valores del parámetro m para que esto se cumpla.

   Nota: Recuerda que $|a| = 9 \Longrightarrow a = \pm 9$.

   Sol. $9 = V = |[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = \left\| \begin{matrix} 0 & m & m \\ m-3 & m+4 & 0 \\ m & 4 & -m \end{matrix} \right\| = |-3m-12m| \Longrightarrow -3m-12m = \pm 9 \Longrightarrow$
   $\boxed{m_1 = -3, m_2 = -1, m_3 = -2-\sqrt{7}, m_4 = -2+\sqrt{7}}$

4. (2,5 puntos)

   a) (1,5 puntos) Determina para que valores del parámetro a el conjunto de vectores

$$\mathcal{S} = \{(1,a,1),(1-a,a-1,0),(1,1,a)\}$$

   forman base en $\mathbb{R}^3$.

   Sol. Estudiaremos el rango. Para ello, resolvemos $0 = \begin{vmatrix} 1 & 1-a & 1 \\ a & a-1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3a^3 - 3a + 2 \Longrightarrow a_1 = 1$ (*doble*), $a_2 = -2$

   b) (1 punto) Estudia el rango del conjunto de vectores de $\mathcal{S}$ en los casos en que no forme una base en $\mathbb{R}^3$.

   Sol. Para $a = 1$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow rango(A) = 1$. Y para $a = -2$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ $Arango(A) = 2$

5. (1,5 puntos) De dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ sabemos que son ortogonales y que $|\overrightarrow{u}| = 6$ y $|\overrightarrow{v}| = 10$. Halla $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|$ y $|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|$.

   Sol. $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|^2 = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 = 36 + 100 = 136 \Longrightarrow |\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}| = \boxed{\sqrt{136} = 2\sqrt{34}}$. Igual con $|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}| = \boxed{2\sqrt{34}}$